

10 等式・不等式の証明

88

(1)

解法 1 : $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 0 \text{ より, } x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \therefore x = y = z = 0$$

解法 2 : 1 文字消去

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= xy + y(-x - y) + (-x - y)x \\ &= -(x^2 + xy + y^2) \\ &= -\left\{ \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{より, } \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

$$\text{よって, } x + \frac{y}{2} = 0 \text{ かつ } y = 0 \quad \text{すなわち } x = y = 0$$

$$\text{ゆえに, } x = y = z = 0$$

(2)

解法 1 : $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz \\ &= 3xyz \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{より, } xyz = 0$$

よって, x, y, z のうち少なくとも 1 つは 0 である。

解法 2 : 1 文字消去

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + \{-(x + y)\}^3 \\ &= -3xy(x + y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } xy(x + y) = 0 \quad \text{すなわち } xy = 0 \text{ または } x + y = 0$$

 $xy = 0$ のとき x, y のうち少なくとも 1 つは 0 である。 $x + y = 0$ のとき

$$z = -(x + y) = 0$$

よって, x, y, z のうち少なくとも 1 つは 0 である。

(3)

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz \\
 &= (x+y+z) \cdot \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2} + 3xyz \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

より,

$$xyz = -\frac{(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}}{6}$$

ここで, $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$ とすると, $x-y=y-z=z-x$ より, $x=y=z$ このとき, $x^3 + y^3 + z^3 = 3x^3 = 0 \quad \therefore x=y=z=0$ ところが, $x+y+z \neq 0$ (矛盾)よって, $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \neq 0$ ゆえに, $xyz \neq 0$ すなわち x, y, z のどれも 0 ではない。

89

(1)

$$pq+1-(p+q)=(p-1)(q-1)>0 \quad \therefore p+q < pq+1$$

(2)

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2 - (\sqrt{a+b-1})^2 &= 2(\sqrt{a}\sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1) \\
 &= 2(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1) > 0 \quad (\because a>1, b>1)
 \end{aligned}$$

これと

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2 - (\sqrt{a+b-1})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 + \sqrt{a+b-1})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 - \sqrt{a+b-1})$$

より,

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 + \sqrt{a+b-1})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 - \sqrt{a+b-1}) > 0$$

 $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 + \sqrt{a+b-1} > 0$ ($\because a>1, b>1$) だから, $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 - \sqrt{a+b-1} > 0$

$$\therefore \sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$$

(3)

 $b>1, c>1$ より, $b+c>2 \quad \therefore b+c-1>1$

よって,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a+b+c-2} &= \sqrt{a+(b+c-1)-1} \\
 &> \sqrt{a} + \sqrt{b+c-1} - 1 \\
 &> \sqrt{a} + (\sqrt{b} + \sqrt{c} - 1) - 1 \\
 &= \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2
 \end{aligned}$$

90

解法 1

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \text{ は無理数だから, } \frac{p}{q} \neq \sqrt{2}, \frac{2q}{p} \neq \sqrt{2} \\
 \left(\frac{p}{q} - \sqrt{2} \right) \left(\frac{2q}{p} - \sqrt{2} \right) &= \frac{p - \sqrt{2}q}{q} \cdot \frac{2q - \sqrt{2}p}{p} \\
 &= \frac{p - \sqrt{2}q}{q} \cdot \frac{-\sqrt{2}(p - \sqrt{2}q)}{p} \\
 &= -\frac{\sqrt{2}(p - \sqrt{2}q)^2}{pq} < 0 \quad \left(\because \frac{p}{q} \neq \sqrt{2}, \frac{2q}{p} \neq \sqrt{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \frac{p}{q} < \sqrt{2} < \frac{2q}{p} \text{ または } \frac{2q}{p} < \sqrt{2} < \frac{p}{q}$$

ゆえに, $\sqrt{2}$ は $\frac{p}{q}$ と $\frac{2q}{p}$ の間にある。

補足

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{p}{q} - \sqrt{2} \right) \left(\frac{2q}{p} - \sqrt{2} \right) &= 4 - \sqrt{2} \left(\frac{2q}{p} + \frac{p}{q} \right) \\
 \text{ここで, } \frac{2q}{p} + \frac{p}{q} &> 2\sqrt{2} \quad \left(\because \frac{p}{q} \neq \sqrt{2} \right) \\
 \text{よって, } \left(\frac{p}{q} - \sqrt{2} \right) \left(\frac{2q}{p} - \sqrt{2} \right) &= 4 - \sqrt{2} \left(\frac{2q}{p} + \frac{p}{q} \right) < 4 - \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 0 \\
 \text{ゆえに, } \sqrt{2} &\text{ は } \frac{p}{q} \text{ と } \frac{2q}{p} \text{ の間にある。}
 \end{aligned}$$

解法 2

$$\sqrt{2} \text{ は無理数だから, } \frac{p}{q} \neq \sqrt{2}, \frac{2q}{p} \neq \sqrt{2}$$

よって, 次の 3 つのどれか 1 つが成り立つ。

$$(i) \sqrt{2} \text{ が } \frac{p}{q}, \frac{2q}{p} \text{ より大きい。} \quad (ii) \sqrt{2} \text{ が } \frac{p}{q}, \frac{2q}{p} \text{ より小さい。}$$

$$(iii) \sqrt{2} \text{ が } \frac{p}{q} \text{ と } \frac{2q}{p} \text{ の間にある。}$$

$$(i) \text{ では, } \frac{p}{q} < \sqrt{2} \text{ かつ } \frac{2q}{p} < \sqrt{2} \quad \text{すなわち } p < \sqrt{2}q \text{ かつ } p > \sqrt{2}q$$

$$(ii) \text{ では, } \frac{p}{q} > \sqrt{2} \text{ かつ } \frac{2q}{p} > \sqrt{2} \quad \text{すなわち } p > \sqrt{2}q \text{ かつ } p < \sqrt{2}q$$

となり, いずれも成り立たない。よって, (iii) が成り立つ。

解法 3

$$\sqrt{2} \text{ は無理数だから, } \frac{p}{q} \neq \sqrt{2}, \frac{2q}{p} \neq \sqrt{2}$$

$$\text{よって, } \frac{p}{q} < \sqrt{2} \text{ または } \frac{p}{q} > \sqrt{2}$$

$$\frac{p}{q} < \sqrt{2} \text{ のとき}$$

$$\frac{q}{p} > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より, } \frac{2q}{p} > \sqrt{2} \quad \therefore \frac{p}{q} < \sqrt{2} < \frac{2q}{p}$$

$$\frac{p}{q} > \sqrt{2} \text{ のとき}$$

$$\frac{q}{p} < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より, } \frac{2q}{p} < \sqrt{2} \quad \therefore \frac{2q}{p} < \sqrt{2} < \frac{p}{q}$$

$$\text{よって, } \sqrt{2} \text{ は } \frac{p}{q} \text{ と } \frac{2q}{p} \text{ の間にある。}$$

91

(1)

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 &= \frac{3}{8} (a^3 + b^3 - a^2b - ab^2) \\ &= \frac{3}{8} \{a^2(a-b) - b^2(a-b)\} \\ &= \frac{3}{8} (a-b)^2(a+b) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

別解

$$f(a) = \frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \quad (b > 0) \text{ とおくと,}$$

$$f'(a) = \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{3(a-b)(3a+b)}{8}$$

よって, $a > 0$ における $f(a)$ の増減は次のようになる。

a	0	$\dots$	b	$\dots$
$f'(a)$	$/$	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\left(\frac{7b^3}{8} \right)$	$\downarrow$	0	$\uparrow$

$$\text{ゆえに, } \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

(2)

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \text{ より, } \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

$$\text{よって, } 2\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geq a+b \text{ すなわち } \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} \geq a+b$$

$$\text{ここで, } a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}, b = 1 \text{ とおくと, } a+b = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1, \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} = \sqrt[3]{10}$$

$$\text{これと } \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \neq 1 \text{ より, } \sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1$$

92

解法 1

$$|a| = x, |b| = y, |a+b| = z \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} - \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &= \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} - \frac{z}{1+z} \\ &= \frac{x(1+y)(1+z) + y(1+x)(1+z) - z(1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{x+y-z+xy(z+2)}{(1+x)(1+y)(1+z)} \end{aligned}$$

$$x+y-z = |a|+|b|-|a+b| \geq 0 \quad (\text{等号は } a \geq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ のとき成立})$$

$$xy(z+2) = |ab|(|a+b|+2) \geq 0 \quad (\text{等号は } a=0 \text{ または } b=0 \text{ のとき成立})$$

より,

$$\frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} - \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \geq 0 \quad (\text{等号は } a=0 \text{ または } b=0 \text{ のとき成立})$$

すなわち

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \quad (\text{等号は } a=0 \text{ または } b=0 \text{ のとき成立})$$

解法 2

$$\frac{1+|a+b|}{|a+b|} = 1 + \frac{1}{|a+b|}, \quad \frac{1+|a|+|b|}{|a|+|b|} = 1 + \frac{1}{|a|+|b|}$$

$$\text{これと, } |a+b| \leq |a|+|b| \text{ より,}$$

$$\frac{1+|a+b|}{|a+b|} \geq \frac{1+|a|+|b|}{|a|+|b|} \text{ すなわち } \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{等号は } a \geq 0, b \geq 0 \text{ のとき成立} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} - \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &= \frac{|a|(1+|b|)(1+|a|+|b|) + |b|(1+|a|)(1+|a|+|b|) - (|a|+|b|)(1+|a|)(1+|b|)}{(1+|a|)(1+|b|)(1+|a|+|b|)} \\ &= \frac{|ab|(|a|+|b|+2)}{(1+|a|)(1+|b|)(1+|a|+|b|)} \geq 0\end{aligned}$$

等号は $a=0$ または $b=0$ のとき成立・・・③

$$\text{これと①より, } \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

また, 等号成立条件は, ②かつ③より, $a=0$ または $b=0$

93

解法 1 : 相加相乗平均

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} &= (9x+4y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \right) \\ &= 34 + \left(\frac{4y}{x} + \frac{36x}{y} \right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{36y}{z} \right) + \left(\frac{81x}{z} + \frac{z}{x} \right) \\ &\geq 34 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{36x}{y}} + 2\sqrt{\frac{4z}{y} \cdot \frac{36y}{z}} + 2\sqrt{\frac{81x}{z} \cdot \frac{z}{x}} \\ &= 34 + 24 + 24 + 18 \\ &= 100\end{aligned}$$

等号成立は $\frac{4y}{x} = \frac{36x}{y}$, $\frac{4z}{y} = \frac{36y}{z}$, $\frac{81x}{z} = \frac{z}{x}$ が同時に成り立ちかつ $9x+4y+z=1$ のとき

このとき, $\frac{4y}{x} = \frac{36x}{y}$, $\frac{4z}{y} = \frac{36y}{z}$, $\frac{81x}{z} = \frac{z}{x}$ より, $y=3x$, $z=9x$

よって, $9x+4y+z=30x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{30}, y=\frac{1}{10}, z=\frac{3}{10}$

以上より, $x=\frac{1}{30}, y=\frac{1}{10}, z=\frac{3}{10}$ で最小値 100 をとる。

解法 2 : シュワルツの不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} &= (9x+4y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \right) \\ &= \left\{ (3\sqrt{x})^2 + (2\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \right\} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y}} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{z}} \right)^2 \right\} \\ &\geq \left(3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{y} \cdot \frac{2}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{3}{\sqrt{z}} \right)^2 \\ &= 100\end{aligned}$$

$$\text{等号成立は } \frac{3\sqrt{x}}{1} = \frac{2\sqrt{y}}{2} = \frac{\sqrt{z}}{3} \text{ すなわち } 9x = 3y = z \text{ かつ } 9x + 4y + z = 1 \text{ のとき}$$

$$\frac{3\sqrt{x}}{1} = \frac{2\sqrt{y}}{2} = \frac{\sqrt{z}}{3}$$

$$\text{このとき, } 9x + 4y + z = 30x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{30}, y = \frac{1}{10}, z = \frac{3}{10}$$

$$\text{以上より, } x = \frac{1}{30}, y = \frac{1}{10}, z = \frac{3}{10} \text{ で最小値 } 100 \text{ をとる。}$$

補足

シュワルツの不等式

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

解法 3 : 数学Ⅲ (微分) で解く

$$z = 1 - 9x - 4y \text{ より, } \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{1-9x-4y}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{1-9x-4y} \text{ を } x \text{ の関数とみなし, } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{9}{1-9x-4y} + \frac{4}{y} \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{81}{(1-9x-4y)^2} \\ &= \frac{81x^2 - (1-9x-4y)^2}{x^2(1-9x-4y)^2} \\ &= \frac{\{9x + (1-9x-4y)\}\{9x - (1-9x-4y)\}}{x^2(1-9x-4y)^2} \\ &= \frac{(1-4y)\{18x - (1-4y)\}}{x^2(1-9x-4y)^2} \end{aligned}$$

$$9x + 4y + z = 1 \text{ および } x, y, z \text{ は正の数より, } 0 < y < \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{1} \quad 0 < x < \frac{1}{9} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{よって, } 1-4y > 0, \quad 0 < \frac{1-4y}{18} < \frac{1}{18} < \frac{1}{9}$$

これより, $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1-4y}{18}$	$\cdots$	$\frac{1}{9}$
$f'(x)$	$/$	$-$	0	$+$	$/$
$f(x)$	$/$	$\downarrow$	極小	$\uparrow$	$/$

$$\text{ゆえに, } f(x) \text{ は } x = \frac{1-4y}{18} \quad \cdots \textcircled{3} \quad \text{で最小値 } f\left(\frac{1-4y}{18}\right) = 4\left(\frac{9}{1-4y} + \frac{1}{y}\right) \text{ をとる。}$$

次に、 $g(y) = 4\left(\frac{9}{1-4y} + \frac{1}{y}\right)$ とおき、その最小値を求める。

ただし、定義域は①より、 $0 < y < \frac{1}{4}$ である。

$$\begin{aligned} g'(y) &= 4 \left\{ \frac{36}{(1-4y)^2} - \frac{1}{y^2} \right\} \\ &= 4 \cdot \frac{36y^2 - (1-4y)^2}{y^2(1-4y)^2} \\ &= \frac{4\{6y + (1-4y)\}\{6y - (1-4y)\}}{y^2(1-4y)^2} \\ &= \frac{4(2y+1)(10y-1)}{y^2(1-4y)^2} \end{aligned}$$

よって、 $g(y)$ の増減は次のようになる。

y	0	...	$\frac{1}{10}$	...	$\frac{1}{4}$
$g'(y)$	/	-	0	+	/
$g(y)$	/	↓	極小	↑	/

ゆえに、 $g(y)$ は $y = \frac{1}{10}$ で最小値 $g\left(\frac{1}{10}\right) = 100$ をとる。

このとき③より、 $x = \frac{1}{30}$ であり、これは②を満たす。

さらに、 $z = 1 - 9x - 4y = \frac{3}{10} > 0$

以上より、 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ は $x = \frac{1}{30}$, $y = \frac{1}{10}$, $z = \frac{3}{10}$ で最小値 100 をとる。

94

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \\
 &= \sum_{k=1}^n (x^2 - 2a_k x + a_k^2) \\
 &= \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2 \\
 \therefore f(x) &\geq 0
 \end{aligned}$$

(2)

$f(x)=0$ の判別式を D とすると, (1) より, $D \leq 0$

$$\text{これと } \frac{D}{4} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}
 (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) &\leq 0 \\
 \therefore (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 &\leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)
 \end{aligned}$$

(3)

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$ のとき, $D=0$ となるから,
 $f(x)=0$ は重解をもつ。

$$\text{よって, 重解を } \alpha \text{ とすると, } f(\alpha) = \sum_{k=1}^n (\alpha - a_k)^2 = 0 \quad \therefore \alpha - a_k = 0$$

ゆえに, $\alpha = a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

95

(1)

$$\begin{aligned}
 pf(x_1) + qf(x_2) - f(px_1 + qx_2) &= px_1^2 + qx_2^2 - (px_1 + qx_2)^2 \\
 &= p(1-p)x_1^2 - 2pqx_1x_2 + q(1-q)x_2^2 \\
 &= pqx_1^2 - 2pqx_1x_2 + qp x_2^2 \\
 &= pq(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\
 &= pq(x_1 - x_2)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$\therefore f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$ (等号成立は $x_1 = x_2$ のとき)

(2)

(1) で $p=q=\frac{1}{2}$, $x_1 = a + \frac{1}{a}$, $x_2 = b + \frac{1}{b}$ とおくと,

$$\frac{1}{2}f\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}f\left(b + \frac{1}{b}\right) \geq f\left(\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}f\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}f\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right) &= \left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(a+b+\frac{a+b}{ab}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{よ} \text{り}, \quad \frac{1}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\} \geq \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$$

$$\therefore \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \quad (\text{等号成立は } a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b} \text{ のとき}) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$ab=a(1-a)=-a^2+a=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{これと } ab > 0 \text{ より}, \quad 0 < ab \leq \frac{1}{4} \quad \therefore \frac{1}{ab} \geq 4 \quad (\text{等号成立は } a=b=\frac{1}{2} \text{ のとき})$$

$$\text{よ} \text{つて}, \quad \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{1}{2}(1+4)^2 = \frac{25}{2} \quad (\text{等号成立は } a=b=\frac{1}{2} \text{ のとき}) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \quad \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2} \quad (\text{等号成立は } a=b=\frac{1}{2} \text{ のとき})$$